



· 西北大学学报 110 周年刊庆 ·

BPHZ 重整化的收敛与温伯格渐进定理

要宏佳¹, 郝 昆¹, 杨战营², 杨文力¹, 石康杰¹

(1. 西北大学 现代物理研究所, 陕西 西安 710127; 2. 西北大学 物理学院, 陕西 西安 710127)

摘要 BPHZ 重整化理论的中心问题是证明重整化后的费曼波函数 R_F 在闵氏空间的积分绝对收敛, 要证明这一点, 只须证明在欧氏空间的对应波函数 $\bar{R}_F$ 在欧氏空间的积分绝对收敛, Hahn 和 Zimmermann 证明了这一结论。该文用温伯格渐进定理也给出了这一结果, 由于证明所需要的条件不同, 两种方法能涵盖的场论并不完全相同。该文共分 4 部分: ①介绍温伯格渐进定理及 A_n 类函数; ②详细推导渐进定理的实质部分; ③解释为什么 A_n 类函数在 R_n 绝对可积必须在有界区 σ 绝对可积, 证明这个条件由 R_n 向 $R_l (l < n)$ 的递推关系; ④证明 Zimmermann 给出的 $\bar{R}_F$ 是动量空间 R_n 的 A_n 类函数并且在 R_n 的任何有界区 σ 绝对可积, 进一步证明 $\bar{R}_F$ 在 R_n 绝对可积。

关键词 BPHZ 重整化; 费曼图; 对称群; 绝对可积; 敛散性

中图分类号: O413.3 **DOI**: 10.16152/j.cnki.xdxbzr.2023-06-011

The convergence of the BPHZ renormalization and Weinberg's asymptotic theorem

YAO Hongjia¹, HAO Kun¹, YANG Zhanying², YANG Wenli¹, SHI Kangjie¹

(1. Institute of Modern Physics, Northwest University, Xi'an 710127, China;

2. School of Physics, Northwest University, Xi'an 710127, China)

Abstract The central problem of the BPHZ renormalization theory is to prove the absolute convergence of the integral of the renormalized Feynman wave function R_F in Minkowski space. To prove this, one only has to prove the absolute convergence of the integral of the corresponding wave function in Euclidean space. Hahn and Zimmermann demonstrated this conclusion. This article also provides this result using Weinberg's asymptotic theorem. Due to the different conditions required for proof, the field theories covered by the two methods are somewhat different. This paper can be divided into four parts: ① Introduction to Weinberg's asymptotic theorem and A_n class function. ② Detailed derivation of the substantive part of the theorem. ③ Explain why A_n class functions in R_n must be absolutely integrable in the bounded region σ , prove the recursive relation of this condition from R_n to $R_l (l < n)$. ④ Prove the $\bar{R}_F$ given by Zimmermann is A_n class function in the momentum space R_n , and it is absolutely integrable in any bounded region σ of R_n . Further prove that $\bar{R}_F$ in R_n is ab-

收稿日期: 2023-11-13

基金项目: 国家自然科学基金(12275214, 12247103, 12047502, 11805152); 陕西省自然科学基金基础研究计划(2021JCW-19, 2019JQ-107)。

第一作者: 要宏佳, 女, 从事量子可积模型研究, yyhongjia@163.com。

通信作者: 郝昆, 男, 研究员, 博士生导师, 从事量子可积模型、量子场论研究, haoke72@163.com;

杨文力, 男, 教授, 博士生导师, 从事理论物理研究, wlyang@nwu.edu.cn。

solutely integrable.

Keywords BPHZ renormalization; Feynman diagram; symmetry group; absolutely integrable; convergence and divergence

粒子之间的相互作用可以用费曼图^[1-3]表示。这些图的外线代表入射粒子和出射粒子,内线代表费曼传播子,费曼图 Γ 给定后,可以计算它的值 S_Γ 。当费曼图没有回路时,可以直接计算粒子之间的散射振幅,有回路时必须对回路对应的动量积分。这种积分通常是发散的,这就需要在拉格朗日密度中添加抵消项来抵消这种发散。扣除抵消项(A) 后得到

$$R_\Gamma = S_\Gamma - A, \tag{1}$$

R_Γ 在动量空间的积分就是收敛的^[1,4,9]。

这种抵消发散的方法可以作如下解释,原始的物理量是发散的不可测量的,我们测量到的结果是各种粒子相互作用之后的结果,也就是那些发散量由于相互作用抵消的结果,这些量包括相互作用常数。这些量是有限的,这样做就等于给物理量重新进行标度,所以叫做重整化^[3,10-11] (renormalization)。

为了使发散的积分能计算,首先要把它截断,变成有限的,这称为正常化。但是当截断参量趋向无穷时还是发散的,我们添加了抵消项,这些抵消项在截断参量有限时都是有限的。然后,可以对这些有限量进行计算,计算的结果在截断参量趋于无穷时就是有限的了。以上是原来重整化的程序。BPHZ 方案^[12-16] 的创新点是不用正常化手续,直接在费曼被积函数 S_Γ 添加抵消项,得到 R_Γ ,这就绕过了正常化的麻烦。另外此方案对可重整化的条件放宽了,更具有一般性。因此,证明这样的 R_Γ 在动量空间的积分收敛就很关键,是这个理论的中心问题。文献[12] 借助 $\bar{R}_\Gamma$ 的分母具有平移性质。

$$\bar{R}_\Gamma = \frac{A(k)}{B(k)}, \min_k \left| \frac{B(k+\Delta)}{B(k)} \right| \geq f(\Delta) > 0 \tag{2}$$

和 $\bar{R}_\Gamma$ 的递推性质证明了 $\bar{R}_\Gamma$ 的收敛性。本文用温伯格渐进定理^[17-20] 证明了这一结果,它不需要文献[12] 的平移性质。 $\bar{R}_\Gamma$ 是这两类性质都满足的波函数。

1 温伯格渐进定理及 A_n 类函数

下面介绍温伯格渐进定理。

首先定义动量空间 R_n 中的 A_n 类函数,实函数 $f(P)$ 称为属于 A_n 。如果对每个子空间 $S \subset R_n$ 有对应的“指数” $\alpha(S)$ 和“对数指数” $\beta(S)$,而且对任何 $m \leq n$ 个独立矢量 $(L_1, L_2, \dots, L_m)$ 和 R_n 中的有界区域 W (W 是 n 维),存在一系列实数 $b_1, b_2, \dots, b_m > 1$ 和 $M > 0$ (它们依赖于 $L_1, L_2, \dots, L_m$ 与 W ,但与 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m$ 无关) 使

$$\begin{aligned} |f(P)| &= |f(L_1\eta_1 \cdots \eta_m + L_2\eta_2 \cdots \eta_m + \cdots + L_m\eta_m + C)| \leq \\ &M\eta_1^{\alpha(L_1)} \ln \eta_1^{\beta(L_1)} \eta_2^{\alpha(L_1, L_2)} \ln \eta_2^{\beta(L_1, L_2)} \times \cdots \times \\ &\eta_m^{\alpha(L_1, L_2, \dots, L_m)} \ln \eta_m^{\beta(L_1, L_2, \dots, L_m)} \equiv F_W. \end{aligned} \tag{3}$$

当 $C \in W$ 且 $\eta_1 \geq b_1, \eta_2 \geq b_2, \dots, \eta_m \geq b_m$ 时成立。因此:

$$M = M(L_1, L_2, \dots, L_m; W); \tag{4}$$

$$b_l = b_l(L_1, L_2, \dots, L_m; W) > 1. \tag{5}$$

为了方便,我们要求当任何几个坐标矢 L_i 反号时, M 和 b_l 不变:

$$M = M(\pm L_1, \pm L_2, \dots, \pm L_m; W); \tag{6}$$

$$b_l = b_l(\pm L_1, \pm L_2, \dots, \pm L_m; W). \tag{7}$$

令 $P = L_1\eta_1\eta_2 \cdots \eta_m + L_2\eta_2 \cdots \eta_m + \cdots + L_m\eta_m + C$, 我们称满足条件

$$C \in W, |\eta_i| \geq b_i(L_1, L_2, \dots, L_m; W)$$

的 P 形成的点集称为对应坐标架 $\{L_1, L_2, \dots, L_m; W\}$ 的温伯格区 Ω_n^W , 称式(3) 右边的函数 F_W 为温伯格覆盖函数。

要强调的是,当 C 在 W 内变化时, F_W 是不变的。现在考虑 $f(P)$ 的积分

$$\begin{aligned} f_{L'_1 \cdots L'_k}(P) &= \int_{-\infty}^{\infty} dy_1 \cdots \\ &\int_{-\infty}^{\infty} dy_k f(P + L'_1 y_1 + L'_2 y_2, \cdots + L'_k y_k) \end{aligned} \tag{8}$$

对任何 P , 如果每个相继的积分 $\int_{-\infty}^{\infty} dy_1 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dy_k |f(P + L'_1 y_1 + L'_2 y_2, \cdots + L'_k y_k)|$ 都收敛,则说式(8) 的积分“存在”,在这种情况下,由 Fubini 定理,式(8) 右边只依赖于 $L'_1, L'_2, \dots, L'_k$ 张成的空间 $\{L'_1, L'_2, \dots, L'_k\} = I \subset R_n$, 由此把式(8) 写成

$$f_I(P) = f_{L'_1 \cdots L'_k}(P) = \int_{P' \in I} d^k P' f(P + P'). \tag{9}$$

如果在式(8)中 y_i 上迭加 y'_1 ,令 $P'' = P + L'_1 y'_1 + \cdots$,则 $f_l(P'') = f_l(P)$,因为

$$\text{空间}\{L'_1, L'_2, \cdots, L'_k\} = I =$$

$$\text{空间}\{L'_1(1+y'_1), L'_2(1+y'_2), \cdots, L'_k(1+y'_k)\}。$$

由 Fubini 定理可知,这两者相等。为了方便,可以选一些子空间 E ,满足

$$R_n = I + E。 \quad (10)$$

I 和 E 相互独立,并且把 P 局限在 E 内。

温伯格导出如下定理。

定理 1

如果①函数 $f(P) \in A_n$ 其渐近指数为 $\alpha(S)$ 、 $\beta(S)$,其中, S 是任何 R_n 的非空的子空间。并且如果② $f(P)$ 在任何 R_n 的有界区域 σ 绝对可积,

$$\int_{\sigma} dP |f(P)| < \infty \quad (11)$$

且如果③ $D_l < 0$,

其中

$$D_l = \sup_{S' \subset I} [\alpha(S') + \dim S'], \quad (12)$$

则有以下结果:

1) $f_l(P)$ 存在;

2) $f_l(P) \in A_{n-k}$,其 $\alpha_l(S)$ 对任何 $S \subset E$ 由下式给出,

$$\alpha_l(S) = \max_{\Lambda(I)S' = S} [\alpha(S') + \dim S' - \dim S]。 \quad (13)$$

式中: $S' \subset I$ 表示 S' 是 I 的子空间,包括 $S' = I$; $\dim S'$ 表示 S' 的维数; $\Lambda(I)S' = S$ 表示 S' 沿 I 向 E 的投影是 S ; $\max$ 表示取所有满足 $\Lambda(I)S' = S$ 的 S' ,对这样的 S' 取极大值。实际上,根据 Heine-Borel 定理,在下一节证明只有有限个 S' 需要考虑,所以这里的 $\max$ 是对有限个量取最大值。

式(13)的右边一般不是空间 S 的函数,因为式(13)中 $\alpha(S') + \dim S'$ 不是一个确定的数。本文令 $\alpha(\{S\}) = -\dim S - 1$,

$$\beta(\{S\}) = \beta \geq 0。 \quad (14)$$

β 与 S 无关,就可以保证式(13)成立。

式(8)是一个多重积分,只要把每一个单重积分研究清楚就可以了,因为它们都是 $-\infty$ 到 $+\infty$ 的积分,各重积分被积函数的结构相同。下一节研究单重积分,它是渐近定理的关键或实质部分。

2 渐近定理证明的关键部分

考虑 $I = \{L\}$ 以及

$$f_l(P) = f_L(P) = \int_{-\infty}^{\infty} f(P + Ly) dy。 \quad (15)$$

式中: $f \in A_n$ 。按式(3)、(6)、(7)、(14),当 $P \in W$,

$|y| \geq b_0(L; W)$,有

$$|f(P + Ly)| \leq M(L; W) |y|^{\alpha(L)} \ln |y|^{\beta(L)}。 \quad (16)$$

由于非空的 $I = \{L\}$ 的子空间只有 $I (= \{L\})$ 自己,式(12)给出 $D_l = \alpha(L) + 1$ 。根据式(14),

$$\alpha(L) = -2 < -1。 \quad (17)$$

由此,式(15)中 $|y| \geq b_0$ 的两段积分绝对收敛。另一方面, $|y| \leq b_0$ 的区间是有界的。根据式(11), f 在这段的积分也绝对收敛。因此对任何 P , $f_L(P)$ 存在,渐近定理1的第1)部分成立。令 P 点在 E 上,证明了对 E 上的任何点 P , $f_L(P)$ 存在。

下面证明定理1的第2)部分。

任选矢量序列 $L_1, L_2, \cdots, L_m \in E$,它们之间以及它们和 L 之间互相独立;选定 R_n 中的有界区域 W 。我们的任务是证明若 $f \in A_n$,并满足式(11)、(14),则 $f_L(P) \in A_{n-1}$ 。换句话说就是可以找到 $M(L_1, L_2, \cdots, L_m; W)$ 和 $b_l(L_1, L_2, \cdots, L_m; W)$,当 $\eta_l \geq b_l, C \in W$,就有

$$|f_L(P)| \leq M \eta_1^{\alpha(L_1)} \ln \eta_1^{\beta(L_1)} \times \eta_2^{\alpha(L_1, L_2)} \ln \eta_2^{\beta(L_1, L_2)} \times \cdots \times \eta_m^{\alpha(L_1, L_2, \cdots, L_m)} \ln \eta_m^{\beta(L_1, L_2, \cdots, L_m)}, \quad (18)$$

式中

$$P = L_1 \eta_1 \cdots \eta_m + L_2 \eta_2 \cdots \eta_m + \cdots + L_m \eta_m + C。 \quad (19)$$

我们还须证明式(13)。

为了用 $f \in A_n$ 的性质求式(15)的渐近覆盖,首先把 y 写成

$$y = \xi_0 \eta_1 \eta_2 \cdots \eta_m。 \quad (20)$$

令 $|\xi_0| = \eta_0, y = \pm \eta_0 \eta_1 \cdots \eta_m$,得到

$$P + Ly = L_1 \eta_1 \cdots \eta_m + L_2 \eta_2 \cdots \eta_m + \cdots + L_m \eta_m + C \pm L \eta_0 \eta_1 \cdots \eta_m = \pm L \eta_0 \eta_1 \cdots \eta_m + L_1 \eta_1 \cdots \eta_m + \cdots + L_m \eta_m + C。 \quad (21)$$

这正是在坐标系 $\{\pm L, L_1, \cdots, L_m; W\}$ 下, $P + Ly$ 的 η 参数化。对比式(3),由于 $f \in A_n$,有:

$$b_l = b_l(\pm L, L_1, \cdots, L_m; W) > 1; \quad (22)$$

$$M = M(\pm L, L_1, \cdots, L_m; W)。 \quad (23)$$

由式(6)、(7)和式(22)、(23)右边对于 $+L$ 和 $-L$ 相等,当 $C \in W, \eta_l \geq b_l, l = 0, 1, \cdots, m$,有:

$$|f(P + Ly)| \leq$$

$$M\eta_0^{\alpha(\{L\})} \ln \eta_0^{\beta(\{L\})} \eta_1^{\alpha(\{L,L_1\})} \ln \eta_1^{\beta(\{L,L_1\})} \times \cdots \times \eta_m^{\alpha(\{L,L_1,\cdots,L_m\})} \ln \eta_m^{\beta(\{L,L_1,\cdots,L_m\})} \equiv F_W; \tag{24}$$

$$I_+ = \int_{y=b_0\eta_1\cdots\eta_m}^{\infty} |f(P+Ly)| \, dy \leq \int_{b_0}^{\infty} d\eta_0\eta_1\cdots\eta_m F_W < \int_1^{\infty} d\eta_0\eta_1\cdots\eta_m F_W = J_+; \tag{25}$$

$$I_- = \int_{y=-\infty}^{-b_0\eta_1\cdots\eta_m} |f(P+Ly)| \, dy. \tag{26}$$

在这一段

$$\xi_0 \leq -b_0\eta_1\cdots\eta_m, \eta_0 \geq b_0\eta_1\cdots\eta_m. \tag{27}$$

因此有

$$I_- \leq \int_{y=-\infty}^{-b_0\eta_1\cdots\eta_m} F_W dy = \int_{-\infty}^{-b_0} -d\eta_0\eta_1\cdots\eta_m F_W = \int_{b_0}^{\infty} d\eta_0\eta_1\cdots\eta_m F_W < \int_1^{\infty} d\eta_0\eta_1\cdots\eta_m F_W = J_-. \tag{28}$$

我们计算式(27)、(28),由式(14)、(24) 根据各 η 相关空间的维数得

$$J_+ = J_- = \int_1^{\infty} M\eta_0^{-2} \ln \eta_0^{\beta} d\eta_0\eta_1\cdots\eta_m \times \eta_1^{-3} \ln \eta_1^{\beta} \eta_2^{-4} \ln \eta_2^{\beta} \times \cdots \times \eta_m^{-m-2} \ln \eta_m^{\beta} = MN \times \eta_1^{-2} \ln \eta_1^{\beta} \eta_2^{-3} \ln \eta_2^{\beta} \times \cdots \times \eta_m^{-m-1} \ln \eta_m^{\beta}. \tag{29}$$

其中

$$N = \int_1^{\infty} \eta_0^{\alpha(\{L\})} \ln \eta_0^{\beta(\{L\})} d\eta_0 = \int_1^{\infty} \eta_0^{-2} \ln \eta_0^{\beta} d\eta_0. \tag{30}$$

当 L_i 中有任意一些 L_j 反号变为 $-L_j$ 时,由式(7) 可得, b_l 和 M 不变,因为 α 和 β 的宗量是这些矢量形成的空间,不会因为某几个 L_j 反号而改变空间,因而 α 和 β 的宗量也不变,所以 F_W 不变,而且 $N = N(\alpha\{L\}, \beta\{L\})$ 也不变。

在 $y = -\infty \rightarrow \infty$ 中间有一段

$$y \in [-b_0, b_0] \eta_1\eta_2\cdots\eta_m, \tag{31}$$

对应 $\xi_0 \in [-b_0, b_0]$ 不符合 $\eta_0 = |\xi_0| \geq b_0$ 条件,须另作处理。

我们用中点为 u ,半径为 λ 的小开区间 $(u - \lambda, u + \lambda)$ 覆盖闭区间 $[-b_0, b_0]$ 的 u 点,这总是可能的。

令

$$\Delta\xi_1 \in (u - \lambda, u + \lambda), \tag{32}$$

由式(31) 可得

$$y = (u + \Delta\xi_1) \eta_1 \cdots \eta_m; \tag{33}$$

令

$$\Delta\xi_1 \eta_1 = \xi_1, \eta_1 = \left| \frac{1}{\Delta\xi_1} \right| |\xi_1|, \tag{34}$$

有

$$y = u\eta_1\eta_2\cdots\eta_m + \xi_1\eta_2\eta_3\cdots\eta_m; \tag{35}$$

再令

$$\frac{1}{|\Delta\xi_1|} = \eta'_1, |\xi_1| = \eta_0, \tag{36}$$

得

$$\eta_1 = \eta'_1\eta_0, \eta'_1 = \eta_1/\eta_0. \tag{37}$$

由式(19) 的 P 给出

$$P + Ly = (L_1 + uL) \eta'_1 \eta_0 \eta_2 \cdots \eta_m \pm L\eta_0\eta_2\cdots\eta_m + L_2\eta_2\cdots\eta_m + \cdots + L_m\eta_m + C. \tag{38}$$

这正是在坐标系 $\{L_1 + uL, \pm L, L_2, \cdots, L_m; W\}$ 下 $P + Ly$ 的 η 参数表达式。由于 $f \in A_n$, 有:

$$b_l(u) \equiv b_l(L_1 + uL, \pm L, L_2, \cdots, L_m; W) > 1; \tag{39}$$

$$M(u) \equiv M(L_1 + uL, \pm L, L_2, \cdots, L_m; W). \tag{40}$$

由式(6)、(7) 可知,式(39)、(40) 的右边与 $\pm$ 号无关。根据式(38) 中各个 η 相关的空间维数和式(14) 得到如下结果。

$$\text{当 } \eta'_1 \geq b_1(u), \eta_0 \geq b_0(u), \text{ 其余 } \eta_l \geq b_l(u), l = 2, \cdots, m, \tag{41}$$

有

$$|f(P + Ly)| \leq M(u) \eta_1'^{-2} \ln \eta_1'^{\beta} \eta_0^{-3} \ln \eta_0^{\beta} \times \eta_2^{-4} \ln \eta_2^{\beta} \times \cdots \times \eta_m^{-m-2} \ln \eta_m^{\beta} \equiv F_W(u). \tag{42}$$

$$\text{由式(39)、(40) 可得, } \eta'_1 = \frac{1}{|\Delta\xi_1|} \geq b_1(u), \text{ 由}$$

$$\text{式(32) 可得 } |\Delta\xi_1| \leq \lambda, \text{ 因此, } \lambda \leq b_1^{-1}(u).$$

令

$$\lambda = b_1^{-1}(u) = \lambda(u), \tag{43}$$

这样,闭区间 $[-b_0, b_0]$ 上每一点 u 都被小开区间 $(u - \lambda(u), u + \lambda(u))$ 覆盖。由 Heine Borel 定理可知,其中一定存在有限个小开区间 $(u_{i_1} - \lambda(u_{i_1}), u_{i_1} + \lambda(u_{i_1}))$ 写成 $(u_{i_1} - \lambda_{i_1}, u_{i_1} + \lambda_{i_1}), i_1 = 1, 2, \cdots, S$, 交迭在一起也可以覆盖整个闭区间 $[-b_0, b_0]$ 。

由于 $[-b_0, b_0]$ 的中点是 0, 所以小开区间集合 $(-u_{i_1} - \lambda_{i_1}, -u_{i_1} + \lambda_{i_1}), i_1 = 1, 2, \cdots, S$, 也可以交迭在一起覆盖闭区间 $[-b_0, b_0]$ 。改写式(39)

和(40) 中的 $b_l(\boldsymbol{L}_1 + u\boldsymbol{L}, \cdots) \rightarrow b_l(\boldsymbol{L}_1 + u_{i_1}\boldsymbol{L}, \cdots) \equiv b_l(i_1), M(\boldsymbol{L}_1 + u\boldsymbol{L}, \cdots) \rightarrow M(\boldsymbol{L}_1 + u_{i_1}\boldsymbol{L}, \cdots) \equiv M(i_1)$, 改写式(42) 中的 $F_W(u)$ 为 $F_W(u) \rightarrow F_W(i_1)$ 可得, 当 $\eta'_{i_1} \geq b_1(i_1), \eta_0 \geq b_0(i_1)$, 其余 $\eta_l \geq b_l(i_1)$

时, 有

$$|f(P + \boldsymbol{L}y)| \leq M(i_1) \eta_1'^{-2} \ln \eta_1'^\beta \eta_0^{-3} \ln \eta_0^\beta \times \eta_2^{-4} \ln \eta_2^\beta \times \cdots \times \eta_m^{-m-2} \ln \eta_m^\beta \equiv F_W(i_1). \tag{44}$$

考虑式(34), $|\xi_1| = |\Delta\xi_1| \eta_1 = \frac{\eta_1}{\eta'_1}, \eta'_1 \geq b_1(i_1)$, 得到 $|\xi_1| \leq b_1^{-1}(i_1) \eta_1$. 由式(44) 可得, $|\xi_1| = \eta_0 \geq b_0(i_1)$, 所以 $|\xi_1|$ 的变化范围是 $b_0(i_1) \rightarrow b_1^{-1}(i_1) \eta_1$, 在此范围内式(45) 成立. 由式(35) 可得, $dy = d\xi_1 \eta_2 \cdots \eta_m$, 考虑到 $|\xi_1| = \eta_0$, 式(45) 给出

$$I_{+i_1} = \int_{y=u_{i_1}\eta_1 \cdots \eta_m + b_0(i_1)\eta_2 \cdots \eta_m}^{u_{i_1}\eta_1 \cdots \eta_m + b_1^{-1}(i_1)\eta_1 \cdots \eta_m} |f(P + \boldsymbol{L}y)| dy \leq \int_{b_0(i_1)}^{b_1^{-1}(i_1)\eta_1} F_W(i_1) d\xi_1 \eta_2 \cdots \eta_m. \tag{46}$$

由式(35)、(45), 以及 $\eta'_1 = \frac{\eta_1}{\eta_0}$ 可得

$$I_{+i_1} \leq \int_{b_0(i_1)}^{b_1^{-1}(i_1)\eta_1} d\eta_0 M(i_1) (\eta_1/\eta_0)^{-2} \ln(\eta_1/\eta_0)^\beta \eta_0^{-3} \ln \eta_0^\beta \times \eta_2^{-4+1} \times \cdots \times \eta_m^{-m-2+1} \ln \eta_m^\beta = M(i_1) N'(i_1) \eta_2^{-3} \ln \eta_2^\beta \times \cdots \times \eta_m^{-m-1} \ln \eta_m^\beta, \tag{47}$$

$$N'(i_1) = \int_{b_0(i_1)}^{b_1^{-1}(i_1)\eta_1} d\xi_1 (\eta_1/\xi_1)^{-2} \ln(\eta_1/\xi_1)^\beta \times \xi_1^{-3} \ln \xi_1^\beta \leq \eta_1^{-2} \ln \eta_1^{2\beta+1} = N(i_1) \text{ (见附录 A)}, \tag{48}$$

得到

$$I_{+i_1} < J_{+i_1} = M(i_1) N(i_1) \eta_2^{-3} \times \cdots \times \eta_m^{-m-1} = M(i_1) \eta_1^{-2} \ln \eta_1^{2\beta+1} \eta_2^{-3} \ln \eta_2^\beta \times \cdots \times \eta_m^{-m-1} \ln \eta_m^\beta. \tag{49}$$

由于式(45) 中 $F_W(i_1)$ 对 ξ_1 的依赖关系只与其绝对值有关, 我们有 $I_{-i_1} < J_{-i_1} = J_{i_1}$. 对于 $\xi_1 \leq -b_0(i_1)$ 的一段, 对比式(46) 有:

$$I_{-i_1} = \int_{y=u_{i_1}\eta_1 \cdots \eta_m - b_0(i_1)\eta_2 \cdots \eta_m}^{u_{i_1}\eta_1 \cdots \eta_m - b_1^{-1}(i_1)\eta_1 \cdots \eta_m} |f(P + \boldsymbol{L}y)| dy = \int_{\xi_1 = -\eta_1 b_1^{-1}(i_1)}^{-b_0(i_1)} |f(P + \boldsymbol{L}y)| d\xi_1 \eta_2 \cdots \eta_m \leq$$

$$\int_{\xi_1 = -\eta_1 b_1^{-1}(i_1)}^{-b_0(i_1)} F_W(i_1) d\xi_1 \eta_2 \cdots \eta_m = J''_{-i_1}; \tag{50}$$

$$J''_{-i_1} = \int_{b_0(i_1)}^{b_1^{-1}(i_1)\eta_1} F_W(i_1) d\xi_1 \eta_2 \cdots \eta_m = J''_{i_1}. \tag{51}$$

对比式(47), 有 $I_{-i_1} < J_{-i_1} = J_{+i_1} (J''_{i_1}/J_{i_1} = N'(i_1)/N(i_1))$.

中间缺少的一段 $\xi_1 \in [-b_0(i_1), b_0(i_1)]$ 须另作处理. 用中点为 u , 半径为 λ 的开区间覆盖闭区间 $[-b_0(i_1), b_0(i_1)]$ 上的点 u . 令 $\Delta\xi_2 \in (u - \lambda, u + \lambda)$, 由式(35) 可得, 它与 y 的关系是 $y = u_{i_1} \eta_1 \cdots \eta_m + \underbrace{(u + \Delta\xi_2)}_{\xi_1} \eta_2 \cdots \eta_m$. 再令

$$\Delta\xi_2 \eta_2 = \xi_2, \tag{52}$$

有

$$y = u_{i_1} \eta_1 \cdots \eta_m + u \eta_2 \cdots \eta_m + \xi_2 \eta_3 \cdots \eta_m \tag{53}$$

和

$$P + \boldsymbol{L}y = \boldsymbol{L}_1 \eta_1 \cdots \eta_m + \boldsymbol{L}_2 \eta_2 \cdots \eta_m + \cdots + \boldsymbol{L}_m \eta_m + \boldsymbol{C} + \boldsymbol{L}(u_{i_1} \eta_1 \cdots \eta_m + u \eta_2 \cdots \eta_m + \xi_2 \eta_3 \cdots \eta_m) = (\boldsymbol{L}_1 + u_{i_1} \boldsymbol{L}) \eta_1 \cdots \eta_m + (\boldsymbol{L}_2 + u \boldsymbol{L}) \eta_2 \cdots \eta_m + \boldsymbol{L} \xi_2 \eta_3 \cdots \eta_m + \boldsymbol{L}_3 \eta_3 \cdots \eta_m + \cdots + \boldsymbol{L}_m \eta_m + \boldsymbol{C}. \tag{54}$$

令 $\frac{1}{|\Delta\xi_2|} = \eta'_2, |\xi_2| = \eta_0$, 由式(52) 有

$$\eta_2 = \eta'_2 \eta_0 \tag{55}$$

和

$$P + \boldsymbol{L}y = (\boldsymbol{L}_1 + u_{i_1} \boldsymbol{L}) \eta_1 \eta'_2 \eta_0 \eta_3 \cdots \eta_m + (\boldsymbol{L}_2 + u \boldsymbol{L}) \eta'_2 \eta_0 \eta_3 \cdots \eta_m \pm \boldsymbol{L} \eta_0 \eta_3 \cdots \eta_m + \boldsymbol{L}_3 \eta_3 \cdots \eta_m + \cdots + \boldsymbol{L}_m \eta_m + \boldsymbol{C}. \tag{56}$$

这正是在坐标系 $\{\boldsymbol{L}_1 + u_{i_1} \boldsymbol{L}, \boldsymbol{L}_2 + u \boldsymbol{L}, \pm \boldsymbol{L}, \boldsymbol{L}_3, \cdots, \boldsymbol{L}_m; W\}$ 下 $P + \boldsymbol{L}y$ 的 η 展开式. 由于 $f(P + \boldsymbol{L}y) \in A_n$, 就有

$$b_l(i_1 u) \equiv b_l(\boldsymbol{L}_1 + u_{i_1} \boldsymbol{L}, \boldsymbol{L}_2 + u \boldsymbol{L}, \pm \boldsymbol{L}, \boldsymbol{L}_3, \cdots, \boldsymbol{L}_m; W) > 1, l = 1, 2, 0, 3, \cdots, m \tag{57}$$

$$M(i_1 u) \equiv M(\boldsymbol{L}_1 + u_{i_1} \boldsymbol{L}, \boldsymbol{L}_2 + u \boldsymbol{L}, \pm \boldsymbol{L}, \boldsymbol{L}_3, \cdots, \boldsymbol{L}_m; W). \tag{58}$$

根据式(6) 和(7) 可得, 二者对 $\pm \boldsymbol{L}$ 的值相同. 根据式(56) 中各个 η 涉及的空间维数和式(14), 当 $\eta'_2 \geq b_2(i_1 u), \eta_0 \geq b_0(i_1 u)$, 其余

$$\eta_l \geq b_l(i_1 u), \tag{59}$$

有

$$|f(P + \boldsymbol{L}y)| \leq M(i_1 u) \eta_1^{-2} \ln \eta_1'^\beta \eta_2'^{-3} \ln \eta_2'^\beta \eta_0^{-4} \ln \eta_0^\beta \eta_3^{-5} \ln \eta_3^\beta \times \cdots \times \eta_m^{-m-2} \ln \eta_m^\beta \equiv F_W(i_1 u), \tag{60}$$

$\eta'_{i_2} \geq b_2(i_1 u)$ 给出 $\frac{1}{|\Delta \xi_2|} \geq b_2(i_1 u), \lambda \leq b_2^{-1}(i_1 u)$ 。

令 $\lambda = b_2^{-1}(i_1 u)$, 从而以 u 点为中心的小开区间的半径 λ 本身是 u 的函数。闭区间 $[-b_0(i), b_0(i)]$ 上的每一点 u 都被一个有限大小的以 u 为中点的开区间 $(u - \lambda(u), u + \lambda(u))$ 覆盖。根据 Heine Borel 定理, 其中一定存在有限个开区间 $(u_{i_1 i_2} - \lambda_{i_1 i_2}, u_{i_1 i_2} + \lambda_{i_1 i_2}), i_2 = 1, 2, \dots, S_2$ 也可以交迭起来覆盖闭区间 $[-b_0(i_1), b_0(i_1)]$ 。由于 $[-b_0(i), b_0(i)]$ 的中点为 0, 用 $(-u_{i_1 i_2} - \lambda_{i_1 i_2}, -u_{i_1 i_2} + \lambda_{i_1 i_2}), i_2 = 1, 2, \dots, S_2$ 也可以交迭地覆盖 $[-b_0(i), b_0(i)]$ 。

对于小区间 $(u_{i_1 i_2} - \lambda_{i_1 i_2}, u_{i_1 i_2} + \lambda_{i_1 i_2})$, 改写 M 和 b_l 的符号 $M(i_1 u) \rightarrow M(i_1 i_2), b_l(i_1 u) \rightarrow b_l(i_1 i_2)$, 改写式 (60) 中

$$F_W(i_1 u) \rightarrow F_W(i_1 i_2)。(61)$$

由式 (59)、(60)、(61) 导出当 $\eta'_{i_2} \geq b_2(i_1 i_2), \eta_0 \geq b_0(i_1 i_2)$, 其余 $\eta_l \geq b_l(i_1 i_2)$, 有

$$\begin{aligned} |f(P + Ly)| &\leq M(i_1 i_2) \eta_1^{-2} \ln \eta_1^\beta \eta_2'^{-3} \times \\ &\ln \eta_2^\beta \eta_0^{-4} \ln \eta_0^\beta \eta_3^\beta \\ &\ln \eta_3^\beta \cdots \eta_m^{-m-2} \ln \eta_m^\beta \equiv F_W(i_1 i_2)。 \end{aligned} (62)$$

根据式 (55) 得到 $|\xi_2| = \eta_0 \geq b_0(i_1 i_2), \eta_2 = \eta'_{i_2} |\xi_2|$; $\eta'_{i_2} \geq b_2(i_1 i_2), |\xi_2| = \eta_2 / \eta'_{i_2} \leq b_2^{-1}(i_1 i_2) \eta_2$ 。所以 $|\xi_2|$ 的变化范围是 $b_0(i_1 i_2) \rightarrow \eta_2 b_2^{-1}(i_1 i_2)$, 在此范围式 (62) 成立 (当 $b_0(i_1 i_2) \geq \eta_2 b_2^{-1}(i_1 i_2)$ 时, 后面的 $I_{\pm i_1 i_2}$ 为 0)。

由式 (53) 可得

$$y = u_{i_1} \eta_1 \cdots \eta_m + u_{i_1 i_2} \eta_2 \cdots \eta_m + \xi_2 \eta_3 \cdots \eta_m。(63)$$

因此, 当 $\xi_2 > 0$, 有

$$\begin{aligned} I_{+i_1 i_2} &= \int_{y=u_{i_1} \eta_1 \cdots \eta_m + u_{i_1 i_2} \eta_2 \cdots \eta_m + b_0(i_1 i_2) \eta_3 \cdots \eta_m}^{u_{i_1} \eta_1 \cdots \eta_m + u_{i_1 i_2} \eta_2 \cdots \eta_m + b_2^{-1}(i_1 i_2) \eta_3 \cdots \eta_m} |f(P + \\ &Ly)| dy \leq \int_{b_0(i_1 i_2)}^{b_2^{-1}(i_1 i_2) \eta_2} d\xi_2 \eta_3 \cdots \eta_m F_W(i_1 i_2) = J''_{+i_1 i_2}。 \end{aligned} (64)$$

当 $\xi_2 < 0, \xi_2$ 的变化范围是 $-\eta_2 b_2^{-1}(i_1 i_2) \rightarrow -b_0(i_1 i_2)$ 。又由式 (63) 可得

$$\begin{aligned} I_{-i_1 i_2} &= \int_{y=u_{i_1} \eta_1 \cdots \eta_m + u_{i_1 i_2} \eta_2 \cdots \eta_m - b_0(i_1 i_2) \eta_3 \cdots \eta_m}^{u_{i_1} \eta_1 \cdots \eta_m + u_{i_1 i_2} \eta_2 \cdots \eta_m - b_2^{-1}(i_1 i_2) \eta_2 \cdots \eta_m} |f(P + \\ &Ly)| dy \leq \int_{-b_2^{-1}(i_1 i_2) \eta_2}^{-b_0(i_1 i_2)} d\xi_2 \eta_3 \cdots \eta_m F_W(i_1 i_2)。 \end{aligned} (65)$$

由于 $F_W(i_1 i_2)$ 只与 ξ_2 的绝对值 $|\xi_2|$ 有关。式 (65) 的右边等于

$$\int_{b_0(i_1 i_2)}^{b_2^{-1}(i_1 i_2) \eta_2} d\xi_2 \eta_3 \cdots \eta_m F_W(i_1 i_2) = J''_{+i_1 i_2}。(66)$$

由式 (62)、(64) 得到:

$$\begin{aligned} J''_{+i_1 i_2} &= M(i_1 i_2) N'(i_1 i_2) \times \eta_1^{-2} \ln \eta_1^\beta \eta_3^{-5+1} \ln \eta_3^\beta \times \\ &\cdots \times \eta_m^{-m-2+1} \ln \eta_m^\beta; \end{aligned} (67)$$

$$\begin{aligned} N'(i_1 i_2) &= \int_{b_0(i_1 i_2)}^{b_2^{-1}(i_1 i_2) \eta_2} d\xi (\eta_2 / \xi)^{-3} \ln (\eta_2 / \xi)^\beta \xi^{-4} \ln \xi^\beta < \\ &\eta_2^{-3} \ln \eta_2^{2\beta+1} = N(i_1 i_2) \text{ (见附录 A)。} \end{aligned} (68)$$

由式 (64)、(66) 得

$$\begin{aligned} J_{-i_1 i_2} &= J_{+i_1 i_2} = \\ &M(i_1 i_2) \eta_1^{-2} \ln \eta_1^\beta \eta_2^{-3} \ln \eta_2^{2\beta+1} \eta_3^{-4} \ln \eta_3^\beta \times \cdots \times \\ &\eta_m^{-m-1} \ln \eta_m^\beta。 \end{aligned} (69)$$

然而 $|\xi_2| \leq b_0(i_1 i_2)$, 即 $\xi_2 \in [-b_0(i_1 i_2), b_0(i_1 i_2)]$ 的区域没有渐近覆盖。我们用中心在 u , 半径为 λ 的小开区间 $(u - \lambda, u + \lambda)$ 覆盖闭区间 $[-b_0(i_1 i_2), b_0(i_1 i_2)]$, 在这小开区间的变量为 $\Delta \xi_3, \xi_2 = u + \Delta \xi_3, \xi_2$ 与 y 的关系是式 (63), 可得这过程可以一直进行下去。到第 r 步时, 要处理 $\xi_{r-1} \in [-b_0(i_1 \cdots i_{r-1}), b_0(i_1 \cdots i_{r-1})]$ 这段闭区间的问题。 ξ_{r-1} 与 y 的关系是

$$\begin{aligned} y &= u_{i_1} \eta_1 \cdots \eta_m + \cdots + u_{i_1 \cdots i_{r-1}} \eta_{r-1} \cdots \eta_m + \\ &\xi_{r-1} \eta_r \cdots \eta_m, \end{aligned} (70)$$

用小开区间 $(u - \lambda, u + \lambda)$ 覆盖闭区间 $[-b_0(i_1 \cdots i_{r-1}), b_0(i_1 \cdots i_{r-1})]$ 的 u 点。令小开区间内 $\xi_{r-1} = u + \Delta \xi_r$,

也就是

$$\begin{aligned} y &= u_{i_1} \eta_1 \cdots \eta_m + \cdots + u_{i_1 \cdots i_{r-1}} \eta_{r-1} \cdots \eta_m + (u + \\ &\Delta \xi_r) \eta_r \cdots \eta_m, \end{aligned} (72)$$

$$\begin{aligned} P + Ly &= L_1 \eta_1 \cdots \eta_m + \cdots + L_m \eta_m + C + \\ &L(u_{i_1} \eta_1 \cdots \eta_m + \cdots + u_{i_1 \cdots i_{r-1}} \eta_{r-1} \cdots \eta_m + (u + \\ &\Delta \xi_r) \eta_r \cdots \eta_m) = (L_1 + u_{i_1} L) \eta_1 \cdots \eta_m + \cdots + (L_{r-1} \\ &+ u_{i_1 \cdots i_{r-1}} L) \eta_{r-1} \cdots \eta_m + (L_r + (u + \Delta \xi_r) L) \eta_r \cdots \eta_m + \\ &L_{r+1} \eta_{r+1} \cdots \eta_m + L_m \eta_m + C。 \end{aligned} (73)$$

$$\text{令 } \Delta \xi_r \eta_r = \xi_r, (74)$$

得到

$$\begin{aligned} P + Ly &= (L_1 + u_{i_1} L) \eta_1 \cdots \eta_m + \cdots + (L_{r-1} + \\ &u_{i_1 \cdots i_{r-1}} L) \eta_{r-1} \cdots \eta_m + (L_r + u L) \eta_r \cdots \eta_m + \\ &L \xi_r \eta_{r+1} \cdots \eta_m + L_{r+1} \eta_{r+1} \cdots \eta_m + \cdots + L_m \eta_m + C。 \end{aligned} (75)$$

根据式 (74), 令

$$\eta'_r = \frac{1}{|\Delta \xi_r|}, \eta_r = \frac{1}{|\Delta \xi_r|} |\xi_r| = \eta'_r \eta_0,$$

$$|\xi_r| = \eta_0, \tag{76}$$

$$\begin{aligned} \text{有 } P + Ly &= (L_1 + u_{i_1}L)\eta_1 \cdots \eta_{r-1}\eta'_r\eta_0\eta_{r+1} \cdots \eta_m + \\ & (L_2 + u_{i_{i_2}}L)\eta_2 \cdots \eta_{r-1}\eta'_r\eta_0\eta_{r+1} \cdots \eta_m + \cdots + (L_{r-1} + \\ & u_{i_{i_{r-1}}}L)\eta_{r-1}\eta'_r\eta_0\eta_{r+1} \cdots \eta_m + (L_r + uL)\eta'_r\eta_0\eta_{r+1} \cdots \\ & \eta_m \pm L\eta_0\eta_{r+1} \cdots \eta_m + L_{r+1}\eta_{r+1} \cdots \eta_m + \cdots + L_m\eta_m + C_0. \end{aligned} \tag{77}$$

这是在坐标系 $\{L_1 + u_{i_1}L, \cdots, L_{r-1} + u_{i_{i_{r-1}}}L, L_r + uL, \pm L, L_{r+1}, \cdots, L_m; W\}$ 下的 $P + Ly$ 的 η 参数化。由于 $f \in A_n$, 又由于式(6)和(7), 有 $b_l(i_1 \cdots i_{r-1}u) > 1, l = 1, 2, \cdots, r + 0, r + 1, \cdots, m$, 和 $M(i_1 \cdots i_{r-1}u)$, 当 $\eta'_r \geq b_r(i_1 \cdots i_{r-1}u), \eta_0 \geq b_0(i_1 \cdots i_{r-1}u)$, 其他 $\eta_l \geq b_l(i_1 \cdots i_{r-1}u)$ 时, $|f(P + Ly)|$ 有渐近覆盖。

根据式(14)和式(77)中各个 η 相关空间的维数,有

$$\begin{aligned} |f(P + Ly)| &\leq M(i_1 \cdots i_{r-1}u)\eta_1^{-2} \ln \eta_1^\beta \times \cdots \times \\ & \eta_r'^{-r-1} \ln \eta_r'^\beta \times \eta_0^{-r-2} \ln \eta_0^\beta \eta_{r+1}^{-r-3} \ln \eta_{r+1}^\beta \times \cdots \times \\ & \eta_m^{-m-2} \ln \eta_m^\beta \equiv F_W(i_1 \cdots i_{r-1}u). \end{aligned} \tag{78}$$

根据 $\eta'_r = \frac{1}{|\Delta\xi_r|} \geq b_r(i_1 \cdots i_{r-1}u), |\Delta\xi_r| \leq b_r^{-1}(i_1 \cdots i_{r-1}u)$, 小开区间 $(u - \lambda, u + \lambda)$ 的半径 $\lambda \leq b_r^{-1}(i_1 \cdots i_{r-1}u)$, 令 $\lambda = b_r^{-1}(i_1 \cdots i_{r-1}u)$, 因此 $\lambda = \lambda(u)$ 是 u 的函数, 当 u 确定后它就确定了, 闭区间 $[-b_0(i_1 \cdots i_r), b_0(i_1 \cdots i_r)]$ 上的每一点 u 都被开区间 $(u + \lambda(u), u - \lambda(u))$ 覆盖。根据 Heine Borel 定理, 其中一定存在有限个开区间 $(u_{i_1 \cdots i_r} - \lambda_{i_1 \cdots i_r}, u_{i_1 \cdots i_r} + \lambda_{i_1 \cdots i_r}), i_r = 1, 2, \cdots, S_r$, 迭起来也覆盖全部 $[-b_0(i_1 \cdots i_r), b_0(i_1 \cdots i_r)]$ 的每个点。我们有如下命题。

命题 1 由于闭区间 $[-b_0(i_1 \cdots i_r), b_0(i_1 \cdots i_r)]$ 的中点为 0, 所以开区间集合 $(-u_{i_1 \cdots i_r} - \lambda_{i_1 \cdots i_r}, -u_{i_1 \cdots i_r} + \lambda_{i_1 \cdots i_r}), i_r = 1, 2, \cdots, S_r$ 也能覆盖 $[-b_0(i_1 \cdots i_{r-1}), b_0(i_1 \cdots i_{r-1})]$ 在这些小区间中的一个, 我们标志:

$$b_l(i_1 \cdots i_{r-1}u)|_{u=u_{i_1 \cdots i_r}} \equiv b_l(i_1 \cdots i_r); \tag{79}$$

$$M(i_1 \cdots i_{r-1}u)|_{u=u_{i_1 \cdots i_r}} \equiv M(i_1 \cdots i_r); \tag{80}$$

$$F_W(i_1 \cdots i_{r-1}u)|_{u=u_{i_1 \cdots i_r}} \equiv F_W(i_1, \cdots, i_r). \tag{81}$$

下面考虑小开区间中 ξ_r 的变化范围, 回顾式(74)、(76)、(79)、(80)、(81)有 $\Delta\xi_r\eta_r = \xi_r$ 。由 $|\Delta\xi_r| = \eta_r'^{-1} \leq b_r^{-1}(i_1 \cdots i_r)$, 得 $|\xi_r| \leq b_r^{-1}(i_1 \cdots i_r)\eta_r$ 。又有 $|\xi_r| = \eta_0 \geq b_0(i_1 \cdots i_r)$, 从而 $|\xi_r|$ 的变化范围是 $b_0(i_1 \cdots i_r) \rightarrow b_r^{-1}(i_1 \cdots i_r)\eta_r$,

在此范围内都有渐近覆盖。由式(72)、(74)、(79)、(80)、(81)得, 对应的 y 是

$$\begin{aligned} y &= u_{i_1}\eta_1 \cdots \eta_m + \cdots + u_{i_1 \cdots i_{r-1}}\eta_{r-1} \cdots \eta_m + \\ & u_{i_1 \cdots i_r}\eta_r \cdots \eta_m + \xi_r\eta_{r+1} \cdots \eta_m \circ \end{aligned} \tag{82}$$

给出 $I_{\pm i_1 \cdots i_r}$:

$$\begin{aligned} I_{+i_1 \cdots i_r} &= \int_{y=u_{i_1}\eta_1 \cdots \eta_m + \cdots + u_{i_1 \cdots i_r}\eta_r \cdots \eta_m + b_r^{-1}(i_1 \cdots i_r)\eta_r \cdots \eta_m}^{y=u_{i_1}\eta_1 \cdots \eta_m + \cdots + u_{i_1 \cdots i_r}\eta_r \cdots \eta_m + b_0(i_1 \cdots i_r)\eta_{r+1} \cdots \eta_m} |f(P + Ly)| dy \leq \\ & \int_{b_0(i_1 \cdots i_{r+1})}^{b_r^{-1}(i_1 \cdots i_r)\eta_r} F_W(i_1 \cdots i_r) d\xi_r \eta_{r+1} \cdots \eta_m = \\ & J''_{+i_1 \cdots i_r}; \end{aligned} \tag{83}$$

$$\begin{aligned} I_{-i_1 \cdots i_r} &= \int_{y=u_{i_1}\eta_1 \cdots \eta_m + \cdots + u_{i_1 \cdots i_r}\eta_r \cdots \eta_m - b_0(i_1 \cdots i_r)\eta_r \cdots \eta_m}^{y=u_{i_1}\eta_1 \cdots \eta_m + \cdots + u_{i_1 \cdots i_r}\eta_r \cdots \eta_m - b_r^{-1}(i_1 \cdots i_r)\eta_r \cdots \eta_m} |f(P + Ly)| dy \leq \\ & \int_{-b_r^{-1}(i_1 \cdots i_r)\eta_r}^{-b_0(i_1 \cdots i_r)} F_W(i_1 \cdots i_r) d\xi_r \eta_{r+1} \cdots \eta_m = \\ & J''_{+i_1 \cdots i_r} \circ \end{aligned} \tag{84}$$

最后一步是由于 F_W 只与 $|\xi_r|$ 有关。如果 $b_0(i_1 \cdots i_r) \geq b_r^{-1}(i_1 \cdots i_r)\eta_r, I_{\pm i_1 \cdots i_r} = 0$, 式(84)的右边还留下一段, $\xi_r \in [-b_0(i_1 \cdots i_r), b_0(i_1 \cdots i_r)], y \in u_{i_1}\eta_1 \cdots \eta_m + \cdots + u_{i_1 \cdots i_r}\eta_r \cdots \eta_m + [-b_0(i_1 \cdots i_r), b_0(i_1 \cdots i_r)]\eta_{r+1} \cdots \eta_m$ 须进一步处理。

由于命题 1 对所有的 r 都适用($r = 0, 1, \cdots, m$), 我们有如下命题。

命题 2 当 L_j 中有一些反向, $L_j \rightarrow -L_j$ 令伴随的 $u_{i_1 \cdots i_j} \rightarrow -u_{i_1 \cdots i_j}, L_j + u_{i_1 \cdots i_j} \rightarrow -(L_j + u_{i_1 \cdots i_j}L)$, 这时由式(6)和(7)可得, $b_l(i_1 \cdots i_r)$ 不变, $M(i_1 \cdots i_r)$ 不变, 又由于式(13)可得, $\alpha\beta$ 也不变, 最终使渐近覆盖函数 $F_W(i_1 \cdots i_r)$ 不变, 因而 $J_{\pm i_1 \cdots i_r}$ 不变。

$$\begin{aligned} \text{将式(74)、(76)代入式(78)、(81)得} \\ |f(P + Ly)| &\leq F_W(i_1 \cdots i_r) = \\ & M(i_1 \cdots i_r)\eta_1^{-2} \ln \eta_1^\beta \times \cdots \times \\ & (\eta_r/|\xi_r|)^{-r-1} \times \ln(\eta_r/|\xi_r|)^\beta \times \\ & |\xi_r|^{-r-2} \ln |\xi_r|^\beta \eta_{r+1}^{-r-3} \ln \eta_{r+1}^\beta \times \cdots \times \\ & \eta_m^{-m-2} \ln \eta_m^\beta \circ \end{aligned} \tag{85}$$

由式(82)、(83)得

$$\begin{aligned} J''_{+i_1 \cdots i_r} &= \\ & \left\{ \int_{b_0(i_1 \cdots i_r)}^{b_r^{-1}(i_1 \cdots i_r)^{-1}\eta_r} d\xi_r \times (\eta_r/\xi_r)^{-r-1} \ln(\eta_r/\xi_r)^\beta \times \xi_r^{-r-2} \xi_r^\beta \right\} \times \\ & M(i_1 \cdots i_r)\eta_1^{-2} \ln \eta_1^\beta \times \cdots \times \eta_{r+1}^{-r-3+1} \ln \eta_{r+1}^\beta \times \cdots \times \\ & \eta_m^{-m-2+1} \ln \eta_m^\beta \circ \end{aligned} \tag{86}$$

由于 $F_W(i_1 \cdots i_r)$ 与 ξ_r 的关系只依赖于 ξ_r 的绝对值, $J''_{-i_1 \cdots i_r} = J''_{i_1 \cdots i_r}, \{\cdots\} = N'(i_1 \cdots i_r)$ 中关于 ξ_r ,

的积分由附录 A 给出: $\{\cdots\} = N'(i_1 \cdots i_r) \leq \eta_r^{-r-1} \ln \eta_r^{2\beta+1}$, 我们有如下命题。

$$\begin{aligned} I_{\pm i_1 \cdots i_r} &< J_{\pm i_1 \cdots i_r}, \\ J_{\pm i_1 \cdots i_r} &= M(i_1 \cdots i_r) \eta_1^{-2} \ln \eta_1^\beta \times \cdots \times \\ &\eta_r^{-r-1} \ln \eta_r^{2\beta+1} \times \eta_{r+1}^{-r-2} \ln \eta_{r+1}^\beta \times \cdots \times \\ &\eta_m^{-m-1} \ln \eta_m^\beta. \end{aligned} \tag{87}$$

这过程可以一直进行下去, 到 $r = m$, 给出当 $\eta'_m = \eta_m / \eta_0 \geq b_m(i_1 \cdots i_m)$, $\eta_0 \geq b_0(i_1 \cdots i_m)$, 其他 $\eta_l \geq b_l(i_1 \cdots i_m)$ 时,

$$\begin{aligned} I_{\pm i_1 \cdots i_m} &\leq J''_{\pm i_1 \cdots i_m} = \\ &M(i_1 \cdots i_m) N'(i_1 \cdots i_m) \eta_1^{-2} \ln \eta_1^\beta \times \cdots \times \\ &\eta_{m-1}^{-m} \ln \eta_{m-1}^\beta, \end{aligned} \tag{88}$$

$$\begin{aligned} N'(i_1 \cdots i_m) &= \\ &\int_{b_0(i_1 \cdots i_m)}^{b_{-1}(i_1 \cdots i_m) \eta_m} d\xi (\eta_m / \xi)^{-m-1} \ln (\eta_m / \xi)^\beta \times \\ &\xi^{-m-2} \ln \xi^\beta < \eta_m^{-m-1} \ln \eta_m^{2\beta+1} = \\ &N(i_1 \cdots i_m), \xi = \xi_m \end{aligned} \tag{89}$$

得到

$$\begin{aligned} J_{\pm i_1 \cdots i_m} &= M(i_1 \cdots i_m) \eta_1^{-2} \ln \eta_1^\beta \times \cdots \times \\ &\eta_{m-1}^{-m} \ln \eta_{m-1}^\beta \eta_m^{-m-1} \ln \eta_m^{2\beta+1}. \end{aligned} \tag{90}$$

我们有如下命题。

命题 3 由命题 2 取 $r = m$ 有, 当 L_j 中有一些反向, $J_{\pm i_1 \cdots i_m}$ 不变, $b_0(i_1 \cdots i_m)$ 不变。

现在我们还留下 $\xi_m \in [-b_0(i_1 \cdots i_m), b_0(i_1 \cdots i_m)]$, $y = u_{i_1} \eta_1 \cdots \eta_m + \cdots + u_{i_1 \cdots i_m} \eta_m + \xi_m$ 这一段须处理。对这一段有

$$\begin{aligned} P + Ly &= L_1 \eta_1 \cdots \eta_m + \cdots + L_m \eta_m + C + \\ &L(u_{i_1} \eta_1 \cdots \eta_m + \cdots + u_{i_1 \cdots i_m} \eta_m + \xi_m) = \\ &(L_1 + u_{i_1} L) \eta_1 \cdots \eta_m + \cdots + \\ &(L_m + u_{i_1 \cdots i_m} L) \eta_m + L \xi_m + C. \end{aligned} \tag{91}$$

找一个 W' , 使当 $C \in W$ 时, $L \xi_m + C \in W'$ 。符合条件的最小的 W' 是 $W \otimes L[-b_0(i_1 \cdots i_m), b_0(i_1 \cdots i_m)]$ 。它的构成是把 W 中的每一点扩张为以该点为中点的线段 $L[-b_0(i_1 \cdots i_m), b_0(i_1 \cdots i_m)]$ 。这样, 当 $\xi_m \in [-b_0(i_1 \cdots i_m), b_0(i_1 \cdots i_m)]$, $L \xi_m + C$ 一定 $\in W'$ 。由命题 3 有当 L_j 中有一些反向为 $-L_j$ 时, 也有 $b_0(i_1 \cdots i_m)$ 不变。

令 $C' = L z_m + C \in W'$, 有

$$\begin{aligned} P + Ly &= (L_1 + u_{i_1} L) \eta_1 \cdots \eta_m + \cdots + \\ &(L_m + u_{i_1 \cdots i_m} L) \eta_m + C'. \end{aligned} \tag{92}$$

$C' \in W'$, 这是在坐标系 $\{L_1 + u_{i_1} L, \cdots, L_m + u_{i_1 \cdots i_m} L; W'\}$ 的 η 参数化。由于 $f \in A_n$, 一定存在 $b'_l(i_1 \cdots i_m)$ 和 $M'(i_1 \cdots i_m)$, 使得当 $\eta_l \geq$

$b'_l(i_1 \cdots i_m)$, 由式 (14) 根据式 (92) 中各 η 相关空间维数有

$$\begin{aligned} |f(P + Ly)| &\leq M'(i_1 \cdots i_m) \eta_1^{-2} \ln \eta_1^\beta \eta_2^{-3} \ln \eta_2^\beta \times \\ &\cdots \times \eta_m^{-m-1} \ln \eta_m^\beta \equiv F'_W(i_1 \cdots i_m), \end{aligned} \tag{93}$$

得到

$$\begin{aligned} I_{0i_1 \cdots i_m} &= \\ &\int_{y=u_{i_1} \eta_1 \cdots \eta_m + \cdots + u_{i_1 \cdots i_m} \eta_m - b_0(i_1 \cdots i_m)}^{u_{i_1} \eta_1 \cdots \eta_m + \cdots + u_{i_1 \cdots i_m} \eta_m + b_0(i_1 \cdots i_m)} |f(P + Ly)| dy \leq \\ &\int_{-b_0(i_1 \cdots i_m)}^{b_0(i_1 \cdots i_m)} d\xi_m F'_W(i_1 \cdots i_m) = \\ &2b_0(i_1 \cdots i_m) F'_W(i_1 \cdots i_m) = J_{0i_1 \cdots i_m}. \end{aligned} \tag{94}$$

到此我们完成了 $\int |f(P + Ly)| dy$ 全程的渐近覆盖。

如果 L_j 中有一些反向 $L_j \rightarrow -L_j$, 伴随的 $u_{i_1 \cdots i_j}$ 也同时反号 $u_{i_1 \cdots i_j} \rightarrow -u_{i_1 \cdots i_j}$, 则 $L_j + u_{i_1 \cdots i_j} L \rightarrow -(L_j + u_{i_1 \cdots i_j} L)$, 由于 $W' = W \otimes L[-b_0(i_1 \cdots i_m), b_0(i_1 \cdots i_m)]$, 由命题 3 可得, $b_0(i_1 \cdots i_m)$ 不变, 所以 W' 不变, 坐标系变为

$$\{\pm(L_1 + u_{i_1} L), \pm(L_2 + u_{i_1 i_2} L), \cdots, \pm(L_m + u_{i_1 \cdots i_m} L); W'\}。$$

根据式 (6) 和 (7), $b'_l(i_1 \cdots i_m)$ 不变, $M'_l(i_1 \cdots i_m)$ 不变; 又由于式 (13), α, β 不变。由于 $b_0, b'_l, M'_l, \alpha, \beta$ 都不变, F'_W 不变, 再由式 (92), $J_{0i_1 \cdots i_m}$ 不变, 我们得到如下命题。

命题 4 当 L_j 中的某一些反号, 且式 (6) 和 (7) 成立时, 所有 $J_\pm, J_{\pm i_1 \cdots i_r}, J_{0i_1 \cdots i_m}$ 都可以做到不变。所以式 (6) 和 (7) 可以由 R_n 递推到 R_{n-1} 。

$$\begin{aligned} \text{我们的目的是计算 } &|\int_{-\infty}^{\infty} f(P + Ly) dy| = \\ &|f_L(P)|, \text{ 已经知道的结果是, 当} \\ &\eta_l \geq \max\{b_l\}, l = 1, 2, \cdots, m, \\ &|\int_{-\infty}^{\infty} f(P + Ly) dy| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(P + Ly)| dy, \end{aligned} \tag{95}$$

所以有

$$\begin{aligned} |f_L(P)| &\leq \sum_{\pm} \sum_{r=0}^m \sum_{i_1 \cdots i_r} I_{\pm i_1 \cdots i_r}(P) + \\ &\sum_{i_1 \cdots i_m} I_{0i_1 \cdots i_m}(P), \end{aligned} \tag{97}$$

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f(P + Ly) dy \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(P + Ly)| dy <$$

$$(J_\pm + \sum_{r=1}^m \sum_i J_{\pm i_1 \cdots i_r} + \sum_i J_{0i_1 \cdots i_m})(P)。$$

其中式(95)的 $\max$ 要对 $\{b_l, b_l(i_1 \cdots i_r), b'_l(i_1 \cdots i_m)\}$ 取遍 $i_1, \cdots, i_r, \cdots, i_m$,在其中找到最大的。我们要强调,在全过程中 P 点是固定的,也就是 $\eta_{l \neq 0}$ 和 C 都不变。

我们计算了 $J_{\pm}, J_{\pm i_1 \cdots i_r}, J_{0i_1 \cdots i_m}$,由它们给出了在 $R_{n-1} = E$ 上 A_{n-1} 函数 $f_L(P)$ 的渐近覆盖。令 $P = L_1 \eta_1 \cdots \eta_m + \cdots + L_m \eta_m + C$,有

$$\begin{aligned} |f_L(P)| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(P + Ly) dy \right| \leqslant \\ M_{n-1}(L_1, L_2, \cdots, L_m; W) \eta_1^{\alpha_1} \ln \eta_1^{\beta_1} \cdots \eta_m^{\alpha_m} \ln \eta_m^{\beta_m} \\ &\equiv F_W \end{aligned} \tag{99}$$

当 $\eta_l \geqslant b_l^{(n-1)}, C \in W$ (W 是 R_n 的有界区)时成立。其中,

$$\begin{aligned} M_{n-1} &= \sum_{\pm} \{M'_{J_{\pm}} + \sum_{r=1}^m \sum_{i_1 \cdots i_r} M'_{J_{\pm i_1 \cdots i_r}}\} + \\ &\quad \sum_{i_1 \cdots i_m} M'_{J_{0i_1 \cdots i_m}}, \end{aligned} \tag{100}$$

$$M'_{J_{\pm}} = M(L, L_1, \cdots, L_m; W) N_1(\alpha(L), \beta(L)), N_1 = \int_1^{\infty} \xi^{-2} \ln \xi^{\beta} d\xi, \text{由式(29)、(30)得:}$$

$$M'_{J_{\pm i_1 \cdots i_r}} = M(i_1 \cdots i_r) N_2, \tag{101}$$

$$N_2 = 1 \text{ (取式(14)时,由附录A给出);}$$

$$\begin{aligned} M'_{J_{0i_1 \cdots i_m}} &= M(L_1 + u_{i_1} L, \cdots, L_m + u_{i_1 \cdots i_m} L; W') \times \\ &\quad 2b_0(L_1 + u_{i_1} L_1, \cdots, L_m + u_{i_1 \cdots i_m} L; W); \end{aligned} \tag{102}$$

$$W' = W \otimes [-b_0(i_1 \cdots i_m), b_0(i_1 \cdots i_m)] L; \tag{103}$$

$$\begin{aligned} b_l^{(n-1)} &= \max \{e, b_l(L, L_1, \cdots, L_m; W), \\ &\quad b_l(L_1 + u_{i_1} L, \cdots, L_r + u_{i_1 \cdots i_r} L, L_{r+1}, \cdots, \\ &\quad L_m; W) b'_l(L_1 + u_{i_1} L, \cdots, L_m + u_{i_1 \cdots i_m} L, \\ &\quad W')\}; \end{aligned} \tag{104}$$

$$\alpha_i = -i - 1, \beta_i = 2\beta + 1. \tag{105}$$

式(14)成立。式(104)中右边的 e 是为了使 $\ln \eta \geqslant 1$ 。

反之,在 $E = R_{n-1}$ 中任意给定 $\{L_1 \cdots L_m; W\}$,总可以在 R_n 中找到 $L, L_1, \cdots, L_m$ 和 W ,由上述程序给出对应于 $\{L_1, \cdots, L_m; W\}$ 的渐近覆盖函数式(99)。这里的要点是,当 C 在 W 内变化时,总可以在 $J_{\pm}(P) J_{\pm i_1 \cdots i_r}(P)$ 中找到这个 $C \in W$,在 $J_{0i_1 \cdots i_m}(P)$ 中找到 $C \in W \subset W'$,使它们的 M' 和 b_l, b'_l 不变,给出的 M_{n-1} 和 $b_l^{(n-1)}$ 不变,与 $C = C_{n-1}$ 的变化无关。

另一点要说明的是在对各个 J 中沿 L 方向积分时,矢量 $C = C_{n-1}, W = W_{n-1}$ 都不变。对于

$J_{0i_1 \cdots i_m}, C \in W \subset W'$ 不变,因为 $J(P)$ 的 P 不变,对 $J_{0i_1 \cdots i_m}, \xi$ 沿 L 方向从 $-b_0(i_1 \cdots i_m)$ 积到 $b_0(i_1 \cdots i_m)$,中点是矢量 C 的端点,保持在 W' 内积分时, Ly 沿 L 方向的投影总是在 P 点不动。

我们有如下定理。

定理2 当 $f_n \in A_n$,而且对于任何坐标系有式(14)时,可以由温伯格程序给出 R_{n-1} 任何坐标系的

$$f_L(P) = \int_{-\infty}^{\infty} f_n(P + Ly) dy. \tag{106}$$

在该 Ω_{n-1} 的覆盖函数式(99),其中 α_i, β_i 由式(105)给出, M_{n-1} 由式(100)给出, $b_l^{(n-1)}$ 由式(104)给出。在这个过程中,不需要 f_n 在有界 σ 绝对可积的条件,即式(11)。

定理2说,如果没有式(11),可以在 $R_{n-1} = E$ 上找到大片区域,即 Ω_{n-1}' ,其中积分 $\int_{-\infty}^{\infty} f(P + Ly) dy$ 是绝对收敛的,因此, $f_L(P)$ 是存在的。那么为什么温伯格渐近定理要求式(11)条件呢?这是因为我们首先要给出坐标系 $\{L_1, \cdots, L_m; W\}$,然后才能得到 $b_l^{(n-1)}$,由它给出 $\Omega_{n-1}', b_l^{(n-1)}$ 由式(104)给出。定义 $\eta_l \geqslant b_l^{(n-1)}$ 的点集为 Ω_{n-1}' ,我们没有办法找出 $\{L_1, \cdots, L_m; W\}$ 使它的温伯格区 Ω_{n-1}' 包含指定的 $P \in E$ 。

因此必须有式(11)条件,保证在 $R_{n-1} = E$ 的每一点 $P, f_L(P) = \int_{-\infty}^{\infty} f(P + Ly) dy$ 都存在。按式(8)的解释,即 $\int_{-\infty}^{\infty} |f(P + Ly)| dy$ 有界。在第3节研究式(11)条件的递推性质,也就是,怎样由 $f_n = f$ 满足式(11),导出 f_{n-1} 满足式(11)。

这里还有一个重要细节须说明,在式(83)中当积分 $J_{\pm i_1 \cdots i_r}$ 时, η_r 必须大于 $b_0(i_1 \cdots i_r) b_r(i_1 \cdots i_r)$,否则这项就不存在。而对于其余 $\eta_{r' \neq r}$,则只要求 $\eta_{r'} \geqslant b_{r'}(i_1 \cdots i_r)$,为解决此问题,温伯格引入新参量 $C(i_1 \cdots i_r)$ 。本文改为全部要求 $\eta_r \geqslant b_r(i_1 \cdots i_r)$,理由是渐近覆盖 F_W 的值可以任意扩大,只要是有限值,就不影响理论框架。从式(99)来看,我们这样处理,就是当 $b_0(i_1 \cdots i_r) b_r(i_1 \cdots i_r) \geqslant \eta_r \geqslant b_r(i_1 \cdots i_r)$ 时,多加了一项本来不存在的有限项,这时 M_{n-1} 本来没有式(100)~(102)联合给出的那么大,我们的处理方式只是使它变大了而已,好处是使式(104)简单了。其实我们在很多计算比如由式(86)给出式(87)时,就曾经一再扩大积分的值(见附录A)。在这些处理中,我们只是把

“= 0”扩大为“> 0”,把“小”的值扩大为“大”的值。不违背渐近覆盖式(99)是“有限的”这个原则,因此也是允许的。

3 f 在有界区绝对可积的分析

在式(15)对于 $f_L(P) = \int_{-\infty}^{\infty} f(P + \mathbf{L}y) dy$ 积分是绝对可积的证明中,我们用到在 $|y| \leq b_0(\mathbf{L}, \mathbf{W})$,即 $y \in [-b_0(\mathbf{L}, \mathbf{W}), b_0(\mathbf{L}, \mathbf{W})]$ 的有界线段上 $f(P + \mathbf{L}y)$ 绝对可积这个条件。只有 f 满足这个条件, $f_L(P)$ 才对任何 P 存在,才能由 R_n 的 A_n 函数 $f_n = f$ 得到 $R_{n-1} = E$ 的 $f_L(P)$,在第2节证明 $f_L(P) \in A_{n-1}$ 。由此可见在有界区域 f 绝对可积条件式(11)是必要的。

下面我们的问题是要从 R_n 的 A_n 函数 f_n 积到 R_{n-k} 的 A_{n-k} 函数 $f_{n-k}(P)$ 我们还需要什么。我们只需要在 R_{n-k+1} 的对应 A_{n-k+1} 函数 f_{n-k+1} 在有界线段上绝对可积,这个条件又如何保证呢?下面的推导表明这只要对应的 f_{n-k+2} 在二维平面的有界区上绝对可积。最终,我们发现当 $f_n \in A_n$ 对1维至 n 维平面的有界区域绝对可积,而且 $\alpha(\{S\}) = -\dim S - 1, \beta_S \geq 0$ 与 S 无关, f_n 就在整个 k 空间绝对可积。其中,积分的每一步都需要这两条性质递推下去。第2节的式(104)、(105)给出 α 和 β 的递推性质,第3节我们推导在有界区域绝对可积条件式(11)的递推性质。

命题 5 如果 $f_l \in A_l$ 在 R_l 的任何1~ l 维平面区域 σ_l 绝对可积,而且 $\alpha_l(\{S\}) = -\dim S - 1$,则其积分函数 $f_L(P)$ 在 $E = R_{l-1}$ 上的任何1~ $l-1$ 维平面上的有界区域 σ_{l-1} 绝对可积。

注意: σ_l 是1~ l 维平面上的有界区,是边缘光滑,在勒贝格积分意义下的可测点集。我们只用到各维的平行多边形,

$$\sigma_l = \mathbf{L}_m k_m \otimes \cdots \otimes \mathbf{L}_{m-i} k_{m-i},$$
$$i = 0 \rightarrow l, k_S \equiv (a_S, b_S)。(107)$$

式中: k_S 是线段。由式(83)、(84)可得, $f_L(P)$ 的覆盖函数 F_W 的 α, β 指数满足式(14)。下面证明 $f_L(P)$ 在任何 $E = R_{l-1}$ 上的任何1~ $l-1$ 维边缘光滑的 σ_{l-1} 绝对可积。

我们研究 $\mathbb{II} = \int_{\sigma_{l-1}} dP |f_L(P)| = \int_{\sigma_{l-1}} dP \int_{-\infty}^{\infty} |f(P + \mathbf{L}y)| dy$,令 $\mathbf{W}$ 为 R_n 的 n 维有界区, $\mathbf{W} \supset \sigma_{l-1}, \sigma_{l-1}$ 是1维至 $l-1$ 维平面上的有界

区, dP 是 σ_{l-1} 上的面积积分元。这里的 P 相当于式(3)中的 $\mathbf{C}$ 。考虑单个矢量 $\mathbf{L}$ 的 η 参数化,坐标系为 $\{\pm \mathbf{L}; \mathbf{W}\}$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(P + \mathbf{L}y)| dy = I_1 + I_2 + I_3, (108)$$

$$I_1 = \int_{-b_0(-\mathbf{L}; \mathbf{W})}^{b_0(\mathbf{L}; \mathbf{W})} |f(P + \mathbf{L}y)| dy, (109)$$

$$I_2 = \int_{b_0(\mathbf{L}; \mathbf{W})}^{\infty} |f(P + \mathbf{L}y)| dy, (110)$$

$$I_3 = \int_{-\infty}^{-b_0(-\mathbf{L}; \mathbf{W})} |f(P + \mathbf{L}y)| dy, (111)$$

$$I_2 = \int_{b_0(\mathbf{L}; \mathbf{W})}^{\infty} |f(P + \mathbf{L}\eta)| d\eta \leq (112)$$

$$\int_{b_0(\mathbf{L}; \mathbf{W})}^{\infty} M(\mathbf{L}; \mathbf{W}) \eta^{\alpha \ln \eta} d\eta, (113)$$

当 $\alpha < -1$ 时收敛。

$$I_3 = \int_{-\infty}^{-b_0(-\mathbf{L}; \mathbf{W})} |f(P + \mathbf{L}y)| dy = \int_{b_0(-\mathbf{L}; \mathbf{W})}^{\infty} |f(P - \mathbf{L}\eta)| d\eta \leq \int_{b_0(-\mathbf{L}; \mathbf{W})}^{\infty} M(-\mathbf{L}; \mathbf{W}) \eta^{\alpha(-L) \ln \eta} d\eta, (114)$$

当 $\alpha(-\mathbf{L}) < -1$ 时收敛。

因为 $\mathbf{W} \supset \sigma_{l-1}$,所以对于任何 $P \in \sigma_{l-1}$,参量 M, b_0 都与 P 无关。 α 和 β 也只与 $\mathbf{L}, -\mathbf{L}$ 有关,因而与 P (相当于式(3)中的 $\mathbf{C}$)无关。

$$\mathbb{II} = \int_{\sigma_{l-1}} dP \int_{b_0(-\mathbf{L}; \mathbf{W})}^{b_0(\mathbf{L}; \mathbf{W})} |f(P + \mathbf{L}y)| dy + \int_{\sigma_{l-1}} dP \int_{b_0(\mathbf{L}; \mathbf{W})}^{\infty} |f(P + \mathbf{L}y)| dy + \int_{\sigma_{l-1}} dP \int_{-\infty}^{b_0(-\mathbf{L}; \mathbf{W})} |f(P + \mathbf{L}y)| dy = \mathbb{II}_1 + \mathbb{II}_2 + \mathbb{II}_3, (115)$$

其中

$$\mathbb{II}_2 \leq \int_{\sigma_{l-1}} dP \int_{b_0(\mathbf{L}; \mathbf{W})}^{\infty} M(\mathbf{L}; \mathbf{W}) \eta^{\alpha(L) \ln \eta} d\eta = \int_{\sigma_{l-1}} dP \int_{b_0(\mathbf{L}; \mathbf{W})}^{\infty} M(\mathbf{L}; \mathbf{W}) \eta^{\alpha(L)} d\eta (116)$$

有界, $\mathbb{II}_3$ 也类似。

$\mathbb{II}_1 = \int_{\sigma_{l-1}} dP \int_{-b_0(-\mathbf{L}; \mathbf{W})}^{b_0(\mathbf{L}; \mathbf{W})} |f(P + \mathbf{L}y)| dy$,注意 $b_0(\pm \mathbf{L}; \mathbf{W})$ 与 P 无关,因为 $P \in \sigma_{l-1} \subset \mathbf{W}$ 。 $\mathbb{II}_1$ 是一个在有界区 $\sigma_{l-1} \otimes \mathbf{L}(-b_0(-\mathbf{L}; \mathbf{W}), b_0(\mathbf{L}; \mathbf{W}))$ 上的 $|f(P + \mathbf{L}y)|$ 的 A_l 函数的体积分。根据归纳法假设,在 R_l 的有界区 $\sigma_l, \int_{\sigma_l} |f| d\sigma_l$ 有界, $\mathbb{II}_1$ 有限。我们有如下命题。

命题 6 如果 A_l 函数在 R_l 的任何有界区 σ_l 的积分绝对收敛,则由温伯格程序得到的 R_{l-1} 的 A_{l-1} 函数在 R_{l-1} 的任何有界区 σ_{l-1} 的积分也绝对收敛。

4 $\tilde{R}_\Gamma$ 在 R_n 的有界区绝对可积

下面我们证明 Zimmermann 给出的欧氏空间的 $R_\Gamma(E)$ 导出的实函数 $\tilde{R}_\Gamma$ 是 A_n 类函数,而且在 R_n 的有界区域绝对可积。由于 $R_\Gamma(E) = \frac{A(k)}{B(k)}$ 的分母为^[15]

$$B(k) = \Pi_\beta C_\beta(E), \tag{117}$$

$$C_\beta(E) = l_\beta^2 + \mu_\beta^2 + i\epsilon(l_\beta^2 + \mu_\beta^2), \tag{118}$$

有
$$\tilde{C}_\beta \equiv l_\beta^2 + \mu_\beta^2 \leq |C_\beta(E)|. \tag{119}$$

式中:
$$l_\beta^2 = \sum_{\mu=1}^4 l_{\beta\mu}^2, l_\beta^2 = \sum_{\mu=1}^3 l_{\beta\mu}^2. \tag{120}$$

我们定义
$$\tilde{R}_\Gamma = \frac{A(k)}{\Pi_\beta \tilde{C}_\beta}. \tag{121}$$

由于 $A(k)$ 是 k 的多项式,在 R_n 的有界区域 A 是有界的,而分母 $|B| \geq \Pi_\beta \mu_\beta^2$,因而 $\tilde{R}_\Gamma$ 在 R_n 的有界区 σ 绝对可积。 σ 是 1 维到 n 维平面上的有界区,

$$\int_\sigma d\sigma < \infty. \tag{122}$$

$d\sigma$ 是 σ 的面积元。 k 空间的任何线性函数 f 可以表为一个矢量 a 与 k 空间的矢量 P 的内积 $a \cdot P$ 。对于 k 空间的超平面 T ,

$$\begin{aligned} P &= L_1 k_1 + L_2 k_2 + \cdots + L_m k_m + C = \\ &L_1 \eta_1 \eta_2 \cdots \eta_m + L_2 \eta_2 \cdots \eta_m + \cdots + \\ &L_m \eta_m + C. \end{aligned} \tag{123}$$

式中: $C \in W$, W 是 R_n 的有界区,有
$$f = f_1 \eta_1 \eta_2 \cdots \eta_m + f_2 \eta_2 \cdots \eta_m + \cdots + f_m \eta_m + f_0, \tag{124}$$

$$f_0 = a \cdot C, f_i = a \cdot L_i, i = 1, 2, \cdots, m. \tag{125}$$

1) 当 $f_1, \cdots, f_m$ 中有非零值的时候,排在最前面的非零项 $f_k \eta_k \cdots \eta_m$ 在 η 充分大时变为主要项,
$$f = f_k \eta_k \cdots \eta_m \left(1 + P' \left(\frac{1}{\eta}\right)\right). \tag{126}$$

$\frac{1}{\eta}$ 的多项式 P' 的常数项为 0, 系数是 C 的线性式。
2) 当所有 $f_i (i = 1, 2, \cdots, m)$ 都为 0 时,

$$f = f_0 = a \cdot C \tag{127}$$

是 C 的线性式。

现在考虑 $\tilde{C}_\beta = \sum_{\mu=1}^4 l_{\beta\mu}^2 + \mu_\beta^2$ 。
1) 当对于 β , 有至少一个 μ , 有式 (126) 中 $f \neq 0$, 且对所有 $\mu, f_i = 0, i = 1, 2, \cdots, k-1$ 。由于 $l_{\beta\mu}$ 是 k 的线性项^[15], 根据式 (126),

$$\begin{aligned} \tilde{C}_\beta &= \sum_\mu \left[f_{k\mu} + P'_\mu \left(\frac{1}{\eta}\right) \right]^2 (\eta_k \cdots \eta_m)^2 = \\ &\sum_\mu \left[f_{k\mu}^2 + 2f_{k\mu} P'_\mu \left(\frac{1}{\eta}\right) + P'^2_\mu \left(\frac{1}{\eta}\right) \right] (\eta_k \cdots \eta_m)^2 = \\ &(\eta_k \cdots \eta_m)^2 \left[\sum_\mu f_{k\mu}^2 + \sum_\mu P''_\mu \left(\frac{1}{\eta}\right) \right]. \end{aligned} \tag{128}$$

式中: $P''_\mu \left(\frac{1}{\eta}\right)$ 是常数项为 0 的 $\frac{1}{\eta}$ 的多项式。由式 (128) 得

$$\tilde{C}_\beta = (\eta_k \cdots \eta_m)^2 \left[\sum_\mu f_{k\mu}^2 + P''' \left(\frac{1}{\eta}\right) \right]. \tag{129}$$

式中: P''' 是常数项为 0, 系数是 C 的分量, $l_{\beta\mu}$ 的结构常数 $f_{k\mu}$, 还有 μ_β^2 和 q 的分量 (q 是 Γ 的外输入) 的多项式。我们可以改写

$$\begin{aligned} \tilde{C}_\beta &= \\ \eta_1^{j_1(\beta)} \eta_2^{j_2(\beta)} \cdots \eta_m^{j_m(\beta)} \left[\sum_\mu f_{k\mu}^2 + P'''_\beta \left(\frac{1}{\eta}\right) \right] &= \\ \eta_1^{j_1(\beta)} \eta_2^{j_2(\beta)} \cdots \eta_m^{j_m(\beta)} \left[a_\beta + P'''_\beta \left(\frac{1}{\eta}\right) \right], a_\beta > 0, \\ j_i(\beta) &= 0, i = 1, 2, \cdots, k-1, \\ j_i(\beta) &= 2, i = k, k+1, \cdots, m. \end{aligned} \tag{130}$$

2) 当对于 β , 对所有的 μ , 有 $f_k = 0, k = 1, 2, \cdots, m$, 这时

$$\begin{aligned} \tilde{C}_\beta &= \sum_\mu (a_\mu \cdot C + a_\mu \cdot q)^2 + \mu_\beta^2 = \\ \eta_1^{j_1(\beta)} \cdots \eta_m^{j_m(\beta)} [a_\beta] &. \end{aligned} \tag{131}$$

式中: a_β 是 C 和 q 以及 μ_β 的大于 0 的二次式。
$$j_i(\beta) = \cdots = j_m(\beta) = 0 \tag{132}$$

对于式 (130) 和式 (131), $\frac{1}{\eta}$ 的多项式常数项 a_β 都大于 0, 而且是 C, q 的分量的 2 次齐次式 $+\mu_\beta^2$ 或者是结构常数 $\sum_\mu f_{k\mu}^2$ 。由式 (130) 和式 (131) 得到

$$\begin{aligned} \tilde{B} &\equiv \Pi_\beta \tilde{C}_\beta = \eta_1^{\sum \beta^{j_1(\beta)}} \cdots \\ &\eta_m^{\sum \beta^{j_m(\beta)}} \Pi_\beta \left[a_\beta + P'_\beta \left(\frac{1}{\eta}\right) \right] = \\ \eta_1^{j_1} \cdots \eta_m^{j_m} \left[a_B + P'_B \left(\frac{1}{\eta}\right) \right] &. \end{aligned} \tag{133}$$

式中: j_i 是偶数; a_B 是 C, q 的分量 μ_β^2 和 f_k 的恒大于

0 的多项式; $P'_B\left(\frac{1}{\eta}\right)$ 是 $\frac{1}{\eta}$ 的多项式,其常数项为 0,其系数是 C, q 的分量 μ_β^2 与 f_k 的多项式。

定义 $\bar{P}_B\left(\frac{1}{\eta}\right)$ 为 $P'_B\left(\frac{1}{\eta}\right)$ 各项(作为 $\frac{1}{\eta}$ 的多项式)的绝对值之和。比如 $P'_B\left(\frac{1}{\eta}\right) = \frac{d_1}{\eta_1} + \frac{d_2}{\eta_2\eta_3}$,则

$$\bar{P}_B = \frac{|d_1|}{|\eta_1|} + \frac{|d_2|}{|\eta_2\eta_3|}, \tag{134}$$

则有

$$\bar{P}_B\left(\frac{1}{|\eta|}\right) \geq \left|P'_B\left(\frac{1}{\eta}\right)\right|. \tag{135}$$

由于 a_B 是 C, q 的分量及 f_k 的恒大于 0 的多项式,当 $C \in W, W$ 是 R_n 的有界区时,作为 C 的函数, $a_B(C)$ 是有界区 W 上的连续函数。由关于有界区上连续函数的定理可知, $a_B(C)$ 在 W 上达到它的最小值 $a'_B(W)$, 由于 a_B 恒大于 0, 有

$$a_B(C) \geq a'_B(W) > 0. \tag{136}$$

由于 P'_B 的系数 d_i 是 C 的分量和 $q f_k$ 的多项式,对 C 的分量连续,所以它的绝对值 $|d_i|$ 也对 C 的分量连续,当 $C \in W, W$ 有界时,可在 W 上达到它的极大值 $d_i(W)$, 有

$$|d_i(C)| \leq d_i(W). \tag{137}$$

而 $\bar{P}_B$ 的项数是有限的,我们总可以找到

$$b_l(L_1, L_2, \cdots, L_m, W) \geq e \tag{138}$$

使当

$$|\eta_l| \geq b_l \tag{139}$$

有:

$$a'_B(W) \geq 2\bar{P}_B\left(\frac{1}{|\eta|}\right); \tag{140}$$

$$a_B(C) + P'_B\left(\frac{1}{\eta}\right) \geq a'_B(W) -$$

$$\bar{P}_B\left(\frac{1}{|\eta|}\right) \geq \frac{1}{2}a'_B(W) > 0. \tag{141}$$

我们有

$$\bar{B} \geq \eta^{j_1} \cdots \eta^{j_m} \left(\frac{1}{2}a'_B(W)\right). \tag{142}$$

命题 7 由于 $\bar{P}_B$ 是 $\frac{1}{|\eta_l|}$ 的多项式,当某些 L_j 反号变为 $-L_j$ 时,相当于式(123)中某些 k_j 值反号变为 $-k_j$,这可以用某些 η_l 反号变为 $-\eta_l$ 来实现。而这种改变不更变 $\bar{P}_B\left(\frac{1}{|\eta|}\right)$, 因为它是 $|\eta_i|$ 的函数,也就不改变寻求 b_l 的判据式(141), 而且不改变 $\bar{B}$ 中的重要参量 $\frac{1}{2}a'_B(W)$ 。

下面讨论 $\bar{R}_\Gamma$ 的分子 $A(k)$ 。

根据文献[15], $A(k)$ 是 kq 的多项式,而 k 可以按式(123) ~ (127) 展开,这样 $A(k)$ 就可以展开为 η 的多项式,

$$A = Q_A(\eta), \tag{143}$$

取各项中 η_l 的最高幂次加以比较,可以找到所有项的 η 的最高幂次 s_l , 然后把 $Q_A(\eta)$ 写成

$$A = Q_A(\eta) = \eta_1^{s_1} \eta_2^{s_2} \cdots \eta_m^{s_m} \left(P_A\left(\frac{1}{\eta}\right)\right), \tag{144}$$

$P_A\left(\frac{1}{\eta}\right)$ 是 $\frac{1}{\eta}$ 的多项式,它的系数是 C, q 的分量的多项式(它的常数项可能为 0)。令 $\bar{P}_A\left(\frac{1}{|\eta|}\right)$ 为 $P_A\left(\frac{1}{\eta}\right)$ 各项的绝对值之和,有

$$|A| \leq |\eta_1|^{s_1} \cdots |\eta_m|^{s_m} \bar{P}_A\left(\frac{1}{|\eta|}\right). \tag{145}$$

当我们令

$$|\eta_l| \geq b_l(L_1, L_2, \cdots, L_m; W) \geq e, \tag{146}$$

因为 $\bar{P}_A$ 是有限项,有:

$$\bar{P}_A\left(\frac{1}{|\eta|}\right) \leq P(A) \equiv \bar{P}_A\left(\frac{1}{b_l}\right) < \infty, \tag{147}$$

$$|A| \leq |\eta_1|^{s_1} \cdots |\eta_m|^{s_m} P(A). \tag{148}$$

由式(143) 和式(148) 得如下命题。

命题 8

$$\begin{aligned} \bar{R}_\Gamma \leq & |\eta_1|^{s_1-j_1} \cdots |\eta_m|^{s_m-j_m} \frac{P(A)}{\frac{1}{2}a'_B(W)} \equiv \\ & |\eta_1^{a_1}| \cdots |\eta_m^{a_m}| M(L_1, L_2, \cdots, L_m; W). \end{aligned} \tag{149}$$

由于式(149)中对 η_i 是取绝对值, $\bar{P}_A$ 也是对 $\frac{1}{\eta}$ 取绝对值。而当 L_j 中某一些反向变为 $-L_j$ 时,相当于式(123)中某些 $\eta_i \rightarrow -\eta_i$, 这时 $P(A)$ 不变。而另一方面,对式(142)中的 $a'_B(W)$, 由命题 7 可知,当 $\eta_i \rightarrow -\eta_i$ 时,它也不变,所以 $M(L_1, L_2, \cdots, L_m; W)$ 也不变。

由命题 7 和 8 有如下命题。

命题 9 对 $\bar{R}_\Gamma$, 我们可以做到第 2 部分中式(6)和(7)的要求:

$$\begin{aligned} M &= M(\pm L_1, \pm L_2, \cdots, \pm L_m; W); \\ b_l &= b_l(\pm L_1, \pm L_2, \cdots, \pm L_m; W). \end{aligned}$$

为了用 Zimmermann 定理确定 $\bar{R}_\Gamma$ 的 η_i 幂次 α_i , 须分析 T 平面及其子平面 T_l 上 k 的多项式对 k 的幂次及其 η 幂次的关系。 T 平面是由式(123)定

义的 P 形成的平面。

令 $k_i \cdots k_m$ 都不为 0,
 $k_i \neq 0, i = 1, \cdots, m,$

(150)

等价地有

$\eta_i \neq 0, i = 1, \cdots, m。$

(151)

T_l 平面是在式(150) 条件下取 $k_{l+1}, \cdots, k_m$ 为固定值形成的平面(或等价地在式(151) 前提下将 $\eta_{l+1} \cdots \eta_m$ 固定形成的平面)。

令 k 的多项式(已合并同类项) 为

$Q = \sum_j a_j k_1^{a_{1j}} k_2^{a_{2j}} \cdots k_m^{a_{mj}};$

(152)

Q 在 T 的幂次为

$\deg_k = \max_j (a_{1j} + a_{2j} + \cdots + a_{mj});$

(153)

Q 在 T_l 的幂次为

$\deg_{k_l} = \max_j (a_{1j} + a_{2j} + \cdots + a_{lj})。$

(154)

我们将

$k_1 = \eta_1 \cdots \eta_m, k_2 = \eta_2 \cdots \eta_m, \cdots, k_m = \eta_m$

代入式(154) 得

$Q = \sum_j a_j (\eta_1 \cdots \eta_m)^{a_{1j}} (\eta_2 \cdots \eta_m)^{a_{2j}} \cdots (\eta_m)^{a_{mj}} =$
 $\sum_j a_j \eta_1^{a_{1j}} \eta_2^{a_{1j}+a_{2j}} \cdots \eta_m^{a_{1j}+a_{2j}+\cdots+a_{mj}}。$

(155)

Q 对 η_m 的幂次为

$\max_j (a_{1j} + a_{2j} + \cdots + a_{mj}) = s_m;$

(156)

Q 对 η_l 的幂次为

$\max_j (a_{1j} + a_{2j} + \cdots + a_{mj}) = s_l。$

(157)

对比式(153) 和(155), 式(154) 和(157), 我们发现

$\deg_k Q(k) \mid_T = \deg_{\eta_m} Q(k(\eta)),$

(158)

$\deg_k Q(k) \mid_{T_l} = \deg_{\eta_l} Q(k(\eta)),$

(159)

这是同一个 $Q(k(\eta))!$

我们把 $\bar{B}(k)$ 作为 k 的多项式, 进一步展开为 η 的多项式, 这是唯一的。

$\bar{B}(k) = \bar{B}(k(\eta)) =$

$\Pi_l \eta_l^{j_l} \left(a_B(C) + P'_B \left(\frac{1}{\eta} \right) \right)。$

(160)

式(158)、(159) 是对 k 的多项式普遍适用的, 因此 j_l 就是 $\bar{B}$ 在 T_l 平面上的 $k_i, i = 1, 2, \cdots, l$ 的 k 幂次:

$\deg_k \bar{B}(k) \mid_{T_l} = j_l, l = 1, 2, \cdots, m,$

(161)

我们有

$\deg_{k_i} \left(\frac{A}{\bar{B}} \right) \Big|_{T_l} = \deg_{k_{i \leq l}} \left(\frac{A}{\bar{B}} \right) =$
 $\deg_{k_{i \leq l}} A - \deg_{k_{i \leq l}} \bar{B} = s_l - j_l。$

(162)

又由 Zimmermann 定义式(156) 右边为

$\deg_k \left(\frac{A}{\bar{B}} \right) \Big|_{T_l} < -\dim T_l = -l, \text{给出}$
 $s_l - j_l = \alpha_l < -l。$

(163)

A 和 $\bar{B}$ 都是 k 的多项式, k 的多项式 k 幂次都是整数, 所以 s_l, j_l, α_l 也是。我们由式(163) 可以令 $\alpha_l = -l - 1$, 因此 $\bar{R}_l$ 满足式(14),

$\alpha_l = -l - 1, \beta_l = 0。$

(164)

我们有如下定理。

定理 3 $\bar{R}_l$ 是 R_n 的 A_n 类函数, 有 $\alpha_l = -l - 1, \beta_l = 0$, 满足式(6)、(7), 而且在 R_n 的 $1 \sim n$ 维平面有界区绝对可积。

推论 $\bar{R}_l$ 在 R_n 绝对可积, 在求积的每一步都可以满足式(6)、(7) 和式(14)。 $\alpha_l = -l - 1, \beta_l \geq 0$ 与 l 无关。

证明 令 $R_n = L_1 y_1 \otimes L_2 y_2 \cdots \otimes L_n y_n, y_i = -\infty \rightarrow \infty$ 。然后顺次沿 $L_1 \cdots L_n$ 方向积分, 每次都保证式(14)、(6)、(7) 和有界平面区绝对可积条件式(11) 直至 R_l 的 A_l 函数。由式(14) 和式(11) 可知, 在 L_n 方向也绝对可积。

附录 A

$A = \int_{b_0}^{\lambda \eta_r} d\xi \xi^{-1} \left(\ln \frac{\eta_r}{\xi} \right)^{\beta'} \ln \xi^{\beta} \eta_r^{\alpha'} =$
 $\int_{b_0}^{\lambda \eta_r} d \ln \xi \ln \xi^{\beta} (\ln \eta_r - \ln \xi)^{\beta'} \eta_r^{\alpha'} =$
 $\int_{\frac{\ln b_0}{\ln \eta_r}}^{\frac{\ln \lambda \eta_r}{\ln \eta_r}} d \left(\frac{\ln \xi}{\ln \eta_r} \right) \left(\frac{\ln \xi}{\ln \eta_r} \right)^{\beta} \left(1 - \frac{\ln \xi}{\ln \eta_r} \right)^{\beta'} \ln \eta_r^{\beta+\beta'+1} \eta_r^{\alpha'} =$
 $\left[\int_{x_1}^{x_2} dx x^{\beta} (1-x)^{\beta'} \right] \ln \eta_r^{\beta+\beta'+1} \eta_r^{\alpha'}。$

(165)

式中:

$x_1 = f(b_0, \eta_r), x_2 = g(\lambda = b_r^{-1}, \eta_r)。$

(166)

由于 $b_0 \geq 1$, 而且 $\eta_r \geq 1$ (否则 $\lambda \eta_r < b_0$, 这项不存在), 所以 $x_1 \geq 0$ 。由于 $\lambda = b_r^{-1} \leq 1$, 所以 $x_2 \leq 1$ 。

$A \leq \left[\int_0^1 dx x^{\beta} (1-x)^{\beta'} \right] \ln \eta_r^{\beta+\beta'+1} \eta_r^{\alpha'}, 0 \leq x = \frac{\ln \xi}{\ln \eta_r}$
 $\leq 1, \text{由 } \beta, \beta' \geq 0, \text{有 } x^{\beta} \text{ 和 } (1-x)^{\beta'} \leq 1,$
 $\left[\int_0^1 dx x^{\beta} (1-x)^{\beta'} \right] \leq 1, \text{因此有}$

$A \leq 1 \times \ln \eta_r^{\beta+\beta'+1} \eta_r^{\alpha'} = N_2^3 \ln \eta_r^{\beta+\beta'+1} \eta_r^{\alpha'},$

(167)

$N_2^3 = 1。$

(168)

参考文献

[1] 李政道. 粒子物理和场论[M]. 上海: 上海科学技术

- 出版社,2006.
- [2] 侯伯元,云国宏,杨战营. 路径积分与量子物理导引:现代高等量子力学初步[M]. 北京:科学出版社,2008.
- [3] SCHWARTZ M D. Quantum field theory and the standard model[M]. Cambridge:Cambridge University Press, 2014.
- [4] 胡宁. 场的量子理论[M]. 北京:科学出版社,1964.
- [5] CHANG S J. Introduction to quantum field theory[M]. Singapore: World Scientific, 1990.
- [6] WEINBERG S. The quantum theory of fields[M]. Cambridge:Cambridge University Press, 1995.
- [7] WEINBERG S. The quantum theory of fields[M]. Repr. with corrections. Cambridge:Cambridge University Press, 2000.
- [8] 曹昌祺. 量子非阿贝尔规范场论[M]. 北京:科学出版社,2008.
- [9] OLIVE K A. Review of particle physics[J]. Chinese Physics C, 2014, 38(9): 090001.
- [10] 石康杰,杨文力,杨战营. 量子场论与重整化导论[M]. 北京:科学出版社,2014.
- [11] ZEE A. Quantum field theory, as simply as possible[M]. Princeton:Princeton University Press, 2023.
- [12] 波戈留波夫,希尔科夫. 量子场论导引[M]. 董明德,译. 侯伯宇,校. 北京:科学出版社,1966.
- [13] HAHN Y, ZIMMERMAN W. An elementary proof of Dyson's power counting theorem[J]. Communications In Mathematical Physics, 1968, 10(4): 330-342.
- [14] ZIMMERMANN W. The power counting theorem for Minkowski metric[J]. Communications in Mathematical Physics, 1968, 11(1): 1-8.
- [15] ZIMMERMANN W. Convergence of Bogoliubov's method of renormalization in momentum space[J]. Communications in Mathematical Physics, 1969, 15(3): 208-234.
- [16] HAO K, SHI K J. The symmetry group of Feynman diagrams and consistency of the BPHZ renormalization scheme[J]. Chinese Physics C, 2021, 45(2): 023107.
- [17] WEINBERG S. High-energy behavior in quantum field theory[J]. Physical Review, 1960, 118(3): 838-849.
- [18] WEINBERG S. Lectures on quantum mechanics[M]. Cambridge:Cambridge University Press, 2015.
- [19] WEINBERG S. Foundations of modern physics[M]. Cambridge:Cambridge University Press, 2021.
- [20] PRESKILL J. Steven Weinberg (1933—2021)[J]. Science, 2021, 373(6559): 1092.

(编辑 李 静)

作者简介:



杨文力,男,陕西宝鸡人,二级教授、博士生导师,主要从事理论物理的研究和教学工作。近十年来致力于U(1)对称破缺量子可积系统精确解及相关问题的研究,取得了系列重要研究成果,解决了挑战量子可积系统四十多年的典型问题,建立了精确求解可积模型的统一理论框架,促进了该领域研究的发展。在理论物理相关领域具有重要影响的 *Physical Review Letters*, *Journal of High Energy Physics*, *Nuclear Physics B*, *Physics Letters B*, *Physical Review D*, *Communications in Mathematical Physics* 等期刊上发表SCI论文200余篇。2014年获得国家杰出青年基金资助,2015年入选教育部长江特聘教授,2016年入选享受政府特殊津贴专家。国际纯粹与应用物理联合会(IUPAP)数学物理分委员会委员、中国物理学会常务理事、全国凝聚态理论与统计物理专业委员会委员、意大利国际理论物理中心(ICTP)正规协联成员、美国数学学会会员。为国家科学技术奖、陕西省科学技术奖和科技部重大专项、国家自然科学基金委项目、国家留学基金委项目等会评专家。